Der maximale Quotientenring von Artinschen Ringen und speziell von endlich-dimensionalen Algebren

INAUGURAL-DISSERTATION

zur
Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich

von
PETER STREBEL
aus Uezwil (Kt. Aargau)

Begutachtet von den Herren
Prof. Dr. H.H. Storrer
Prof. Dr. P. Gabriel

Juris Druck + Verlag Zürich
1979

Der maximale Quotientenring von Artinschen Ringen und speziell von endlich-dimensionalen Algebren

INAUGURAL-DISSERTATION

zur
Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der
Universität Zürich

von
PETER STREBEL
aus Uezwil (Kt. Aargau)

Begutachtet von den Herren
Prof. Dr. H.H. Storrer
Prof. Dr. P. Gabriel

Juris Druck + Verlag Zürich
1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

ISBN 3 260 04609 7

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 1

1. Grundlagen 3

2. Darstellung von Q durch unzerlegbare, projektive Q-Rechtsmoduln 5

3. Blöcke von Q und prohomogene Komponenten von D 17

4. Eine Charakterisierung von Quasi-Frobeniusalgebren 26

5. Algebren mit einem selbstinjektiven maximalen Quotientenring 32

6. Beispiele und ergänzende Bemerkungen 37

Literatur 45

EINLEITUNG

Der maximale (Rechts-)Quotientenring Q eines beliebigen Ringes R wurde von Y.Utumi [21] eingeführt und neu interpretiert von P.Gabriel [5] und J.Lambek [8].

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf den Fall, wo R rechts-Artinsch ist. J.Lambek [8] hat gezeigt, dass Q unter obiger Voraussetzung gerade der Endomorphismenring des kleinsten dichten Rechtsideales D von R ist. Die Struktur von D wurde von H.H.Storrer [17] eingehend untersucht.

Wir beginnen in Abschnitt 1 mit der Festlegung der Notation und zitieren zwei für uns wichtige Resultate aus [8] und [17].

In Abschnitt 2 beschäftigen wir uns mit den unzerlegbaren, projektiven Q-Rechtsmoduln. Weil Q als Endomorphismenring eines Moduls endlicher Länge semiprimär ist ([1], Cor.29.3), sind die primitiven Idempotente von Q in diesem Zusammenhang von besonderem Interesse. Wir beschreiben jene primitiven Idempotente von R, die auch in Q primitiv sind, und geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass eine Basismenge der primitiven Idempotente von R auch eine solche der primitiven Idempotente von Q ist.

Der maximale Quotientenring Q eines unzerlegbaren Ringes R ist im allgemeinen zerlegbar (Beispiel 6.1). Die folgenden Bedingungen sind aber äquivalent:

(a) Q ist unzerlegbar.

(b) Es ist unmöglich, D als direkte Summe zweier Ideale (beide $\neq 0$) darzustellen.

(c) e_0Re_0 ist unzerlegbar (e_0 ist ein gewisses Idempotent von R und wird in Abschnitt 1 definiert.).

Wir beweisen in Abschnitt 3 eine wesentlich allgemeinere Fassung dieser Aussage (Satz 3.4 kombiniert mit Satz 3.6).

Abschnitt 4 ist ein Beitrag zur Theorie der Frobenius- und der Quasi-Frobeniusalgebren. Er enthält im wesentlichen zwei neue Cha-

rakterisierungen (die Sätze 4.2, 4.3 und 4.5). Sie bilden die Grundlage für die Resultate des folgenden Abschnittes.

Für manche Eigenschaften von Q gibt es eine einfache R-interne Beschreibung. So ist der maximale Quotientenring Q eines rechts-Artinschen Ringes R genau dann halbeinfach-Artinsch, wenn das rechts-singuläre Ideal Z von R verschwindet ([17], Prop. 5.8). Das Hauptergebnis von Abschnitt 5 ist der Satz (5.4). Er beinhaltet R-interne, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass der maximale Quotientenring Q einer endlich-dimensionalen Algebra R quasi-Frobenius ist.

Der letzte Abschnitt enthält einige Beispiele. Es wird u.a. gezeigt, dass für die Resultate der beiden vorangehenden Abschnitte keine Verallgemeinerung auf beidseitig-Artinsche Ringe möglich ist.

1. GRUNDLAGEN

Es sei R stets ein Ring mit Einselement. Ein System $\mathcal{F}$ von Rechtsidealen von R heisst idempotenter Filter, wenn folgende Implikationen gelten ([5], Chap. V, §2):

(a) $I, J \in \mathcal{F} \Longrightarrow I \cap J \in \mathcal{F}$.

(b) $I \in \mathcal{F}$ und J ein Rechtsideal von R mit $I \subset J \Longrightarrow J \in \mathcal{F}$.

(c) $I \in \mathcal{F} \Longrightarrow x^{-1}I = \{r \in R \mid xr \in I\} \in \mathcal{F}$ für jedes $x \in R$.

(d) $I \in \mathcal{F}$ und J ein Rechtsideal von R mit $a^{-1}J \in \mathcal{F}$ für jedes $a \in I \Longrightarrow J \in \mathcal{F}$.

Ist nun $\mathcal{F}$ ein idempotenter Filter, so trägt der direkte Limes $R_{(\mathcal{F})} = \varinjlim \mathrm{Hom}_R(I, R)$ $(I \in \mathcal{F})$ eine natürliche Ringstruktur. Der kanonische Ringhomomorphismus $R \longrightarrow R_{(\mathcal{F})}$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathcal{F}$ treu ist, d.h. wenn gilt:

(e) $\ell_R(I) = 0$ für jedes $I \in \mathcal{F}$ [$\ell_R(X)$ bzw. $r_R(X)$ bezeichne den Links- bzw. Rechtsannullator von X.].

Der feinste treue, idempotente Filter ist die Menge $\mathcal{D}$ der dichten Rechtsideale von R. Dabei heisst ein Rechtsideal I von R dicht, wenn $\ell_R(x^{-1}I) = 0$ für jedes $x \in R$. Weitere Charakterisierungen der dichten Rechtsideale findet man z.B. in ([16], Chap. VI, §6.3). Der Ring $Q = R_{(\mathcal{D})}$ heisst maximaler (Rechts-)Quotientenring von R [Détails zur Konstruktion von Q siehe in ([16], Chap. IX) und ([8], §4.3)].

Für den Rest dieses ersten Abschnittes setzen wir nun generell voraus, dass R ein rechts-Artinscher Ring ist. In diesem Fall besitzt jeder idempotente Filter $\mathcal{F}$ ein kleinstes Element F. Dabei ist F ein idempotentes Ideal ($F^2 = F$).

(1.1) SATZ ([8], §4.3, Cor.3). Ist D das kleinste dichte Rechtsideal von R, so gilt: $Q = \mathrm{End}_R(D_R)$. Ferner führt die kanonische Einbettung $R \hookrightarrow Q$ jedes $r \in R$ über in den Endomorphismus λ_r von D_R, welcher definiert ist durch $\lambda_r(d) = rd$ $(d \in D)$.

N bezeichne das Jacobson-Radikal, S den Rechtssockel und Z das rechts-singuläre Ideal von R. Bekanntlich gilt in einem rechts-Artinschen Ring: $S = \ell_R(N)$ und $Z = \ell_R(S)$. Ein primitives Idempotent e von R heisst S-primitiv ([17], Definition 2.2), wenn eR/eN isomorph einem minimalen Rechtsideal ist. In ([17], Lemma 2.3) sind weitere äquivalente Bedingungen formuliert.

Wir betrachten nun eine feste Darstellung der Eins als Summe von orthogonalen, primitiven Idempotenten

$$(A) \qquad 1 = e_{11}+\ldots+e_{1k_1}+e_{21}+\ldots+e_{2k_2}+\ldots+e_{m1}+\ldots+e_{mk_m}+\ldots$$
$$\ldots+f_{11}+\ldots+f_{1p_1}+\ldots+f_{n1}+\ldots+f_{np_n},$$

wo nur die e_{ij} S-primitiv sind und wo e_{ij} isomorph[1] e_{rs} (bzw. f_{ij} isomorph f_{rs}) ist genau dann, wenn $i = r$.

Es seien

$$e_0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} e_{ij}, \quad e_{00} = \sum_{i=1}^{m} e_{i1}$$

(1.2) SATZ ([17], Th.2.5). Ist D das kleinste dichte Rechtsideal des rechts-Artinschen Ringes R, so gilt:

(a) $D = Re_0R = Re_{00}R$.

(b) D enthält jedes S-primitive Idempotent von R.

---

[1]) Zwei primitive Idempotente e, e' heissen isomorph, wenn die beiden Rechtsideale eR, e'R isomorph sind.

2. DARSTELLUNG VON Q DURCH UNZERLEGBARE, PROJEKTIVE Q-RECHTSMODULN

R sei zunächst ein beliebiger Ring mit Einselement, M ein endlich erzeugter R-Rechtsmodul mit Endomorphismenring H. PROJ-H sei die volle Unterkategorie von MOD-H, bestehend aus allen projektiven H-Rechtsmoduln. SUM-M bezeichne jene volle Unterkategorie von MOD-R, deren Objekte isomorph einem Summanden einer direkten Summe von Kopien von M sind.

Der Funktor $(-\otimes_H M)$ erhält direkte Summen. Er führt deshalb jeden projektiven H-Rechtsmodul über in ein Objekt von SUM-M. Man beachte dabei lediglich, dass jedes $J \in$ PROJ-H ein Summand einer direkten Summe von Kopien von H ist.

Da M endlich erzeugt ist, respektiert auch der Funktor $\mathrm{Hom}_R({}_HM, -)$ direkte Summen. Folglich gehen Objekte von SUM-M vermöge $\mathrm{Hom}_R({}_HM, -)$ über in projektive H-Rechtsmoduln.

(2.1) *LEMMA* ([1], Lemma 29.4). Die Funktoren

$$\text{PROJ-H} \underset{\mathrm{Hom}_R({}_HM, -)}{\overset{(-\otimes_H M)}{\rightleftarrows}} \text{SUM-M}$$

sind inverse Kategorie-Aequivalenzen.

R sei nun ein rechts-Artinscher Ring. Sein kleinstes dichtes Rechtsideal D ist in diesem Fall endlich erzeugt. Auch der e_0Re_0-Rechtsmodul Re_0 ist endlich erzeugt. Er hat sogar endliche Länge, denn Re_0 ist ein Artinscher Modul über dem rechts-Artinschen Ring e_0Re_0. Beide Moduln, D_R und $Re_{0\,e_0Re_0}$, haben den gleichen Endomorphismenring, nämlich Q ([16], XI.8, Example 3). Somit folgt aus (2.1):

(2.2) *SATZ*. Beide Funktorpaare im Diagramm

$$\text{SUM-}D \underset{(-\otimes_Q D)}{\overset{\mathrm{Hom}_R({}_Q D, -)}{\rightleftarrows}} \text{PROJ-}Q \underset{\mathrm{Hom}_{e_0 R e_0}({}_Q Re_0, -)}{\overset{(-\otimes_Q Re_0)}{\rightleftarrows}} \text{SUM-}Re_0$$

sind inverse Kategorie-Aequivalenzen.

(2.3) *BEMERKUNGEN*.

(a) Der Funktor $F : \text{MOD-}Q \longrightarrow \text{MOD-}R$ ordne jedem Q-Rechtsmodul J den R-Rechtsmodul JD zu (Restriktion auf den Morphismen). Man sieht leicht ein, dass F direkte Summen erhält. Folglich induziert F einen Funktor zwischen den Kategorien PROJ-Q und SUM-D. Dieser ist natürlich isomorph dem Funktor $(-\otimes_Q D)$.

(b) Für jedes $J \in \text{PROJ-}Q$ sei $\xi_J : J\otimes_R D \longrightarrow JD$ der natürliche Homomorphismus. Gelingt es zu zeigen, dass speziell $\xi_Q : Q\otimes_R D \longrightarrow D$ ein Isomorphismus ist, so sind alle ξ_J Isomorphismen. Es sei also $\eta_D : D \longrightarrow Q\otimes_R D$ definiert durch $\eta_D(d) = 1\otimes d$ $(d \in D)$. Offensichtlich ist $\xi_Q \eta_D = 1_D$. Wir wählen $q \in Q$ und $d \in D$ und schreiben d in der Form

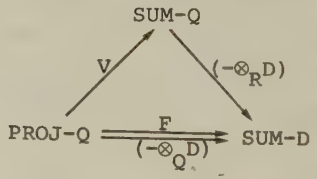
$$d = \sum_i d_i d_i',$$

wo $d_i, d_i' \in D$. Dies ist möglich, weil D idempotent ist. Nun gilt:

$$\eta_D \xi_Q (q\otimes d) = 1\otimes qd = \sum_i (1\otimes qd_i d_i') = \sum_i (qd_i \otimes d_i') = \sum_i (q\otimes d_i d_i') = q\otimes d,$$

also $\eta_D \xi_Q = 1_{Q\otimes_R D}$.

Zusammenfassend stellen wir fest: Im Diagramm



wo V der Vergissfunktor ist, sind $(-\otimes_R D)V$, F und $(-\otimes_Q D)$ natürlich isomorph.

(c) B.Müller ([9], Th.3) hat gezeigt, dass jeder projektive Modul über einem semiperfekten Ring darstellbar ist als direkte Summe von Rechtsidealen, die von einem primitiven Idempotent erzeugt werden. Q ist als Endomorphismenring eines Moduls endlicher Länge sogar semiprimär ([1], Cor.29.3). Folglich ist wegen (2.2) jedes Objekt von SUM-D (SUM-Re_0) isomorph einer direkten Summe von unzerlegbaren Summanden von D_R ($Re_0 e_0 Re_0$).

(2.4) *KOROLLAR*. R sei ein rechts-Artinscher Ring mit dem Basisring R^0. $Q(R^0)$ bezeichne den maximalen (Rechts-)Quotientenring von R^0. Folgende Grössen sind gleich:

(a) Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver Q-Rechtsmoduln.

(b) Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver $Q(R^0)$-Rechtsmoduln.

(c) Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer Summanden des R-Rechtsmoduls D.

(d) Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer Summanden des e_0Re_0-Rechtsmoduls Re_0.

Beweis. (a)=(b). Dies folgt aus einem bekannten Resultat von D.Turnidge ([20], Th.3.1): Die maximalen (Rechts-)Quotientenringe von zwei Morita-äquivalenten Ringen sind ebenfalls Morita-äquivalent.

(a)=(c)=(d). Folgerung aus (2.2). □

Jeder unzerlegbare, projektive Q-Rechtsmodul J ist isomorph einem Rechtsideal gQ, wo g ein geeignetes primitives Idempotent von Q ist. Nicht immer ist es möglich, dieses Idempotent in R zu finden (vgl. Beispiel 6.1). Deshalb ist ein primitives Idempotent von R nicht notwendig primitiv in Q.

(2.5) *KOROLLAR*. R sei ein rechts-Artinscher Ring.

(a) Ein primitives Idempotent f von R ist genau dann primitiv in Q, wenn fD_R unzerlegbar ist.

(b) Die Länge einer Darstellung von Q durch unzerlegbare, projektive Q-Rechtsmoduln ist grösser oder gleich der Länge einer Darstellung von R durch unzerlegbare, projektive R-Rechtsmoduln.

Gleichheit gilt genau dann, wenn fD_R unzerlegbar ist für jedes primitive Idempotent f von R.

Beweis. (a) Setze J = fQ in (2.3.a).

(b) Die Darstellung (A) aus Abschnitt 1 induziert eine Darstellung von D_R:

$$(B)\quad D = e_{11}R \oplus \dots \oplus e_{1k_1}R \oplus \dots \oplus e_{m1}R \oplus \dots \oplus e_{mk_m}R \oplus \dots$$
$$\dots \oplus f_{11}D \oplus \dots \oplus f_{1p_1}D \oplus \dots \oplus f_{n1}D \oplus \dots \oplus f_{np_n}D.$$

Natürlich sind alle $e_{ij}R$ unzerlegbar, die $f_{ij}D$ im allgemeinen aber nicht. Auch der Zusatz ist nun leicht einzusehen. □

Darstellung (B) von D zeigt: Die Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver Q-Rechtsmoduln ist in jedem Fall grösser oder gleich der Anzahl Isomorphieklassen S-primitiver Idempotente in R, d.h. grösser oder gleich der Anzahl Isomorphieklassen minimaler Rechtsideale von R bzw. Q (vgl. [17], Th.4.5). Gleichheit gilt offenbar genau dann, wenn Q ein rechts-K-Ring ist im folgenden Sinne: Ein Ring Q heisst rechts-K-Ring, wenn jeder einfache Q-Rechtsmodul isomorph einem minimalen Rechtsideal von Q ist. Rechts-K-Ringe sind auch dadurch charakterisiert, dass sie keine echten dichten Rechtsideale enthalten. Diese und weitere bemerkenswerte Eigenschaften von K-Ringen, die im übrigen von F.Kasch (unter der Bezeichnung S-Ring) speziell für beidseitig-Artinsche Ringe

eingeführt wurden, sind von B.Stenström ([16], Chap. XI, Lemma 5.1) bewiesen.

(2.6) *SATZ* ([17], Th.5.6). Für einen rechts-Artinschen Ring R sind äquivalent:

(a) Q ist ein rechts-K-Ring.

(b) $\{e_{i1}Q \mid i = 1,\ldots,m\}$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem nicht-isomorpher, unzerlegbarer, projektiver Q-Rechtsmoduln.

(c) D_R ist projektiv.

(d) $Re_0e_0Re_0$ ist projektiv.

(e) $DQ = Q$.

Beweis. (a)$\Leftrightarrow$(b). Dies folgt aus obigen Ueberlegungen.

(a)$\Rightarrow$(e). DQ ist ein dichtes Rechtsideal von Q.

(e)$\Rightarrow$(b). Wegen (e) existiert zu jedem einfachen Q-Rechtsmodul L ein e_{i1} derart, dass $Le_{i1} \neq 0$. Folglich gilt: $L \cong e_{i1}Q/e_{i1}N'$. Dabei bezeichnet N' das Jacobson-Radikal von Q. Die Menge $\{e_{i1}Q/e_{i1}N' \mid i = 1,\ldots,m\}$ ist also ein vollständiges Repräsentantensystem nicht-isomorpher, einfacher Q-Rechtsmoduln. Diese Aussage ist zu (b) äquivalent.

Wir unterbrechen an dieser Stelle den Beweis von (2.6) und fügen noch zwei Hilfssätze ein.

(2.7) *LEMMA*. R sei ein rechts-Artinscher Ring. Für jeden Summanden I von D_R gilt:

(1) $ID = I$.

(2) I/IN ist isomorph einer direkten Summe von minimalen Rechtsidealen.

Beweis. (1) Man verwende die Gleichung $D^2 = D$.

(2) $e_0R(1-e_0) \subset N$, denn $e_0R(1-e_0)$ annulliert jeden einfachen Modul. Folglich gilt: $I(1-e_0) = ID(1-e_0) = Ie_0R(1-e_0) \subset IN$. □

(2.8) *LEMMA*. R sei ein rechts-Artinscher Ring. Es gilt für jedes $I \in$ SUM-D: I ist genau dann projektiv in MOD-R, wenn Ie_0 projektiv in MOD-e_0Re_0 ist.

Beweis. Wegen (2.3.c) dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass I ein unzerlegbarer Summand von D ist. Aus (2.7) schliessen wir: I ist genau dann projektiv, wenn I zu einem $e_{i1}R$ isomorph ist. Weil der Funktor $(-\otimes_R Re_0)$ eine Aequivalenz zwischen SUM-D und SUM-Re_0 induziert, ist dies genau dann der Fall, wenn Ie_0 zu einem $e_{i1}Re_0$ isomorph ist, d.h. wenn Ie_0 als e_0Re_0-Rechtsmodul projektiv ist. □

Wir setzen nun den Beweis von (2.6) fort.

(b)⇔(c). Aus Darstellung (β) und Satz (2.2) folgt: $\{e_{i1}Q \mid i = 1,\ldots,m\}$ ist genau dann ein vollständiges Repräsentantensystem nicht-isomorpher, unzerlegbarer, projektiver Q-Rechtsmoduln, wenn $\{e_{i1}R \mid i = 1,\ldots,m\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem nicht-isomorpher, unzerlegbarer Summanden von D ist. Letzteres trifft aber wegen (2.7) genau dann zu, wenn D_R projektiv ist.

(c)⇔(d). Konsequenz aus (2.8). □

Als nächstes fragen wir uns, wann $\{e_{11},\ldots,e_{m1},f_{11},\ldots,f_{n1}\}$ eine Basismenge der primitiven Idempotente von Q ist.

(2.9) *SATZ*. R sei ein rechts-Artinscher Ring mit Basisring R^0. Entsprechend bezeichne Q^0 den Basisring von Q. Schliesslich sei $Q(R^0)$ der maximale (Rechts-)Quotientenring von R^0. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\{e_{11}Q,\ldots,e_{m1}Q,f_{11}Q,\ldots,f_{n1}Q\}$ ist ein vollständiges Repräsentantensystem nicht-isomorpher, unzerlegbarer, projektiver

Q-Rechtsmoduln.

(b) $\{e_{11}R,\ldots,e_{m1}R,f_{11}D,\ldots,f_{n1}D\}$ ist ein System paarweise nicht-isomorpher, unzerlegbarer R-Rechtsmoduln.

(c) Für jedes primitive Idempotent f von R ist fD_R unzerlegbar und durch die Zuordnung

$$J \longmapsto J \cap R \quad (J \subset Q)$$

wird eine Bijektion zwischen der Menge der maximalen Ideale von Q und der Menge der maximalen Ideale von R definiert.

(d) $Q^0 \cong Q(R^0)$ und fD_R ist unzerlegbar für jedes primitive Idempotent f von R.

Beweis. (a)⇔(b). Folgerung aus (2.2).

(a)⇒(c). Wir vergleichen zunächst das Radikal N von R mit dem Radikal N' von Q. Dazu wählen wir aus der Menge aller e_{ij} und aller f_{ij} zwei Idempotente f, f' aus. Sind sie isomorph, so existieren $u, v \in R$ derart, dass $f = uf'v$ und $f' = vfu$ ([8], p.63). In diesem Fall ist also $RfR = Rf'R$. Wäre nun fNf' nicht Teilmenge von N', so würde gelten: $fQ = fNf'Q = fNfQ$. Dies aber liefert einen Widerspruch, denn aus einer verallgemeinerten Version von Nakayama's Lemma ergäbe sich: $fQ = 0$. fNf' ist auch dann in N' enthalten, wenn f und f' nicht isomorph sind. Dann folgt nämlich unter Verwendung von (a): $fNf' = fRf' \subset fQf' \subset N'$. Wir stellen also fest, dass N in N' enthalten ist.

Bekanntlich ist in einem semiperfekten Ring ein Ideal genau dann maximal, wenn es primitiv ist, d.h. wenn es der Annullator eines einfachen Rechtsmoduls ist. Die maximalen Ideale von R bzw. Q sind also die Ideale $r_R(fR/fN)$ bzw. $r_Q(fQ/fN')$, wo f alle Elemente der Menge $\{e_{11},\ldots,e_{m1},f_{11},\ldots,f_{n1}\}$ durchläuft. Dabei ist fQ/fN', aufgefasst als R-Rechtsmodul, halbeinfach und homogen vom Typ fR/fN. Es gilt deshalb:

$$r_Q(fQ/fN') \cap R = r_R(fQ/fN') = r_R(fR/fN).$$

(a)⇒(d). Jedes Basisidempotent[2] g von R ist auch ein Basisidempotent von Q. Folglich gilt wegen ([18], Prop.1.6): $Q^0 \cong gQg \cong$ $\cong Q(gRg) \cong Q(R^0)$.

(c)⇒(a) & (d)⇒(a). Der gemeinsame Teil der Bedingungen (c) und (d) garantiert, dass die Menge $\{e_{11}Q,\ldots,e_{m1}Q,f_{11}Q,\ldots,f_{n1}Q\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem unzerlegbarer, projektiver Q-Rechtsmoduln umfasst. Wir brauchen also lediglich zu zeigen, dass es mindestens $m+n$ Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver Q-Rechtsmoduln gibt.

Setzen wir (c) voraus, so folgt dies unmittelbar; denn die Anzahl der maximalen Ideale ist gleich der Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver Rechtsmoduln.

Andrerseits impliziert (d):

Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver Q-Rechtsmoduln
= Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver $Q(R^0)$-Rechtsmoduln
= Länge einer Darstellung von $Q(R^0)$ durch unzerlegbare, projektive $Q(R^0)$-Rechtsmoduln
$\geq$ Länge einer Darstellung von R^0 durch unzerlegbare, projektive R^0-Rechtsmoduln
= Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver R-Rechtsmoduln
= $m+n$.

Dabei gilt die erste Gleichung wegen (2.4) und die zweite wegen der Voraussetzung, dass $Q(R^0)$ Basisring ist. Die Ungleichung folgt aus (2.5). □

---

[2]) Jedes Idempotent g eines semiperfekten Ringes R ist Summe von orthogonalen, primitiven Idempotenten g_i $(i = 1,\ldots,r)$. g heisst Basisidempotent, falls $\{g_iR \mid i = 1,\ldots,r\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem nicht-isomorpher, unzerlegbarer, projektiver Rechtsmoduln ist.

(2.10) *KOROLLAR*. R sei eine endlich-dimensionale Algebra über dem algebraisch-abgeschlossenen Körper K. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) bis (d) von (2.9).

(e) Vermöge der Inklusion $R \subset Q$ wird ein Isomorphismus zwischen den beiden Ringen R/N und Q/N' induziert.

(f) Die beiden Ringe R/N und Q/N' sind isomorph.

Beweis. (a)&(c)⇒(e). Aus (c) folgt: $N' \cap R = N$. Deshalb induziert die Inklusion $R \subset Q$ einen injektiven Ringhomomorphismus von R/N nach Q/N'. Es bleibt also zu zeigen: $N' + R = Q$.

Ist f ein beliebiges primitives Idempotent von R, so gilt wegen einer speziellen Version von Schur's Lemma ([2], 27.3): $fQf/fN'f \cong K$. Folglich ist $f(N' + R)f = fN'f + fRf = fQf$.

f' sei nun ein weiteres primitives Idempotent von R. Sind f und f' isomorph, so ist $RfR = Rf'R$, und man erhält: $f(N' + R)f' = f(N' + R)Rf'Rf' = f(N' + R)fRf' = fQfRf' = fQf'$. Die gleiche Beziehung gilt auch dann, wenn f und f' nicht isomorph sind: $f(N' + R)f' = fN'f' + fRf' = fN'f' + fNf' = fN'f' = fQf'$.

(e)⇒(f) ist trivial.

(f)⇒(a). Aus $R/N \cong Q/N'$ folgt insbesondere: R und Q haben die gleiche Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver Rechtsmoduln. Ferner ist wegen (2.5) jedes primitive Idempotent von R auch primitiv in Q. Folglich ist $\{e_{11}, \ldots, e_{m1}, f_{11}, \ldots, f_{n1}\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der primitiven Idempotente von Q. □

(2.11) *BEISPIEL*. Korollar (2.10) gilt nicht für beliebige endlich-dimensionale Algebren.

Es sei Q der Ring aller 3x3-Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen von der Form

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ d & 0 & e \end{bmatrix}$$

Q ist rational vollständig ([17], Example 7.2). Sein Radikal N' umfasst gerade alle Elemente von Q der Gestalt

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Matrizen mit $c = 0$ und $e \in \mathbb{R}$ bilden einen Teilring R von Q. Dabei ist R 7-dimensional über $\mathbb{R}$. Ferner ist Q der maximale Quotientenring von R und es gilt: $\dim_{\mathbb{R}} Q/N' = 4$ und $\dim_{\mathbb{R}} R/N = 3$. Bedingung (f) von (2.10) ist also nicht erfüllt, dagegen gelten offensichtlich (a) bis (d).

Ist R ein rechts-Artinscher Ring, so ist Q semiprimär und folglich N' nilpotent. N' hat aber im allgemeinen eine recht komplizierte Struktur. Sie wird übersichtlich, wenn das kleinste dichte Rechtsideal D projektiv ist. Dann gilt nämlich wegen ([17], Lemma 5.13): $N' = \{q \in Q \mid qD \subset DN\} = DNQ$. Ferner wissen wir aus der Theorie der Endomorphismenringe projektiver Moduln: $Q/N' \cong \mathrm{End}_R(D/DN)$. Wir untersuchen noch einen weiteren Spezialfall.

(2.12) *SATZ*. R sei ein rechts-Artinscher Ring mit $N^2 = 0$. Dann gilt: $N' = \{q \in Q \mid qD \subset S \text{ und } qS \subset DN\}$.

Beweis. Man sieht leicht ein, dass die Menge aller $q \in Q$ mit den Eigenschaften

$$qD \subset S,\ qS \subset DN \qquad (\#)$$

tatsächlich ein nilpotentes Ideal ist. Dabei ist sein Index[3] klei-

---

[3]) Der Index eines nilpotenten Ideales I ist die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$, sodass $I^n = 0$.

ner oder gleich drei. Erfüllen nämlich $q_1, q_2, q_3 \in Q$ die Bedingungen (#), so folgt: $q_1q_2q_3D \subset q_1q_2S \subset q_1DN \subset SN = 0$.

Es bleibt nun zu zeigen, dass alle $q \in N'$ den Eigenschaften (#) genügen. Zunächst ist qD ein nilpotentes Rechtsideal von R. Folglich gilt: $qD \subset N \subset S$. Ist ferner M ein minimales Rechtsideal von R, so ist qM ein kleiner Untermodul von D oder qM ist ein Summand von D. Letzteres aber ist unmöglich. Es gäbe dann nämlich ein $p \in Q$ derart, dass $pqM = M$. pq wäre also ein nicht-nilpotentes Element von N', ein Widerspruch. Es gilt deshalb in der Tat: $qS \subset DN$. □

(2.13) *KOROLLAR*. R sei ein rechts-Artinscher Ring mit $N^2 = 0$. Dann gilt: $(N')^3 = 0$. □

Bemerkung. Im allgemeinen ist $(N')^2 \neq 0$ (Vgl.[17], Example 7.2).

(2.14) *SATZ*. R sei ein rechts-Artinscher Ring mit $N^2 = 0$. Dann gilt: $Q/N' \cong \mathrm{End}_R(D/S) \times \mathrm{End}_R(S/DN)$.

Beweis. S ist ein Q-Linksmodul. Deshalb induziert jedes $q \in Q$ einen Endomorphismus von D/S. Diesen bezeichnen wir mit $\phi_1(q)$. Auch DN ist ein Q-Linksmodul. $\phi_2(q)$ sei der von q auf S/DN induzierte Endomorphismus. Somit sind folgende Ringhomomorphismen erklärt:

$$\phi_1 : Q \longrightarrow \mathrm{End}_R(D/S), \quad \phi_2 : Q \longrightarrow \mathrm{End}_R(S/DN).$$

Ihre Kerne können wie folgt beschrieben werden: $\ker \phi_1 = \{q \in Q \mid qD \subset S\}$, $\ker \phi_2 = \{q \in Q \mid qS \subset DN\}$. Vermöge ϕ_1, ϕ_2 definieren wir einen weiteren Ringhomomorphismus

$$\phi : Q \longrightarrow \mathrm{End}_R(D/S) \times \mathrm{End}_R(S/DN)$$

durch $\phi(q) = (\phi_1(q), \phi_2(q))$. Dabei gilt: $\ker \phi = \ker \phi_1 \cap \ker \phi_2 = N'$.

Wir zeigen nun noch, dass ϕ surjektiv ist. D/DN ist halbeinfach und enthält S/DN. Folglich gibt es einen Untermodul K_1 von

von D_R derart, dass $D = S + K_1$ und $DN = S \cap K_1$. Bezeichnet K_2 das Komplement von DN in S, so ist D direkte Summe von K_1 und K_2. Unzerlegbare Summanden von K_1 sind nicht in DN enthalten, also nicht einfach, aber wegen ([17], Prop.2.8) projektiv. Deshalb ist auch K_1 projektiv. K_1 ist die projektive Decke des Rechtsmoduls D/S, da

$$K_1N = DN \quad \text{und} \quad K_1/DN = K_1/S\cap K_1 \cong S+K_1/S = D/S.$$

Demzufolge kann jedes $f \in \mathrm{End}_R(D/S)$ zu einem Endomorphismus u von K_1 angehoben werden. Ferner induziert jedes $g \in \mathrm{End}_R(S/DN)$ einen Endomorphismus v von K_2. Fassen wir nun u und v als Elemente von Q auf, so gilt: $\phi(u+v) = (\phi_1(u), \phi_2(v)) = (f, g)$. □

(2.15) *SATZ*. R sei ein rechts-Artinscher Ring mit $N^2 = 0$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) bis (d) von (2.9).

(g) $\{f_{11}S,\ldots,f_{n1}S\}$ ist ein System paarweise nicht-isomorpher, singulärer, einfacher Rechtsmoduln.

Beweis. Da das Radikal N im Sockel S enthalten ist, gelten zunächst folgende Gleichungen: $f_{i1}S = f_{i1}D = f_{i1}N$.

(b)&(c)⇒(g). Wegen (c) ist N in N' enthalten. Demzufolge ist $f_{i1}S$ eine Teilmenge von N', sodass wegen (2.12) gilt: $f_{i1}S^2 \subset f_{i1}DN = 0$. Deshalb ist $f_{i1}S$ tatsächlich singulär. Alles weitere folgt aus (b).

(g)⇒(b). Die Elemente der Menge $\{e_{11}R,\ldots,e_{m1}R,f_{11}D,\ldots,f_{n1}D\}$ sind unzerlegbar und paarweise nicht-isomorph ($e_{i1}R \not\cong Z$). □

3. BLOECKE VON Q UND PROHOMOGENE KOMPONENTEN VON D

Konvention. R sei in diesem Abschnitt stets ein rechts-Artinscher Ring.

Wir zerlegen R in Blöcke: $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_t$. Zu jedem R_i bilden wir den maximalen (Rechts-)Quotientenring Q_i. Dabei gilt wegen ([8], §4.3, Prop.9):

$$Q \cong \prod_{i=1}^{t} Q_i .$$

Die Ringe Q_i sind aber im allgemeinen zerlegbar (Beispiel 6.1). Wir geben zunächst eine hinreichende Bedingung dafür, dass R und Q die gleiche Anzahl Blöcke haben.

(3.1) SATZ. Für jedes primitive Idempotent f von R sei fD_R unzerlegbar. Dann ist die Anzahl der Blöcke von Q gleich der Anzahl der Blöcke von R.

Beweis. O.B.d.A. dürfen wir voraussetzen, dass R unzerlegbar ist. Wegen (2.5) sind alle primitiven Idempotente von R auch primitiv in Q. Haben nun zwei unzerlegbare Hauptideale fR und f'R einen gemeinsamen Kompositionsfaktor, so haben auch die unzerlegbaren Hauptideale fQ und f'Q einen gemeinsamen Kompositionsfaktor. Deshalb sind je zwei primitive Idempotente in Q "verkettet". Q ist folglich ebenfalls unzerlegbar. □

(3.2) BEMERKUNG. Insbesondere erfüllen QF-2 Ringe die Voraussetzung von (3.1). Dabei nennt man einen rechts- und links-Artinschen Ring QF-2, wenn jedes von einem primitiven Idempotent erzeugte einseitige Ideal einen einfachen Sockel hat.

Definition. Ein Ideal I von R heisst zweiseitig-unzerlegbar, wenn es unmöglich ist, I als direkte Summe von zwei nicht-trivialen Idealen darzustellen. Existiert zu einem zweiseitig-unzerlegbaren

Ideal I ein weiteres Ideal I' derart, dass $I \oplus I' = D$, so heisst I prohomogene Komponente von D.

Ist $Z = 0$, so sind die prohomogenen Komponenten gerade die homogenen Komponenten ([17], Prop.2.6). Natürlich gilt auch die Umkehrung dieser Aussage.

(3.3) *LEMMA*. Jeder Summand I von ${}_RD$ ist ein Linksideal von Q. Insbesondere ist jede prohomogene Komponente ein Linksideal von Q.

Beweis. Weil D idempotent ist, gilt: $DI = I$. Es folgt: $QI = QDI = DI = I$. □

Ein Idempotent u eines Ringes A heisst zentral-primitiv, wenn u ein primitives Idempotent des Zentrums von A ist. Ist A semiperfekt, so ist die folgende Abbildung 1-1-deutig:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Zentral-primitive}\\ \text{Idempotente von } A\end{array}\right\} \longrightarrow \{\text{Blöcke von } A\}$$

$$u \longmapsto uA$$

(3.4) *SATZ*. Durch die Zuordnung

$$u \longmapsto uD$$

wird eine Bijektion zwischen der Menge der zentral-primitiven Idempotente von Q und der Menge der prohomogenen Komponenten von D definiert. Die Umkehrung ist gegeben durch

$$I \longmapsto \text{Projektion von } D \text{ auf } I.$$

Beweis. $D = I \oplus I'$ sei eine Darstellung von D mittels zweiseitiger Ideale I, I' von R. Dann ist die Projektion v von D auf I ein zentrales Idempotent in Q. Wegen (3.3) gilt nämlich:

$$vQ(1-v)D = vQI' = vI' = 0, \text{ d.h. } vQ(1-v) = 0$$
$$(1-v)QvD = (1-v)QI = (1-v)I = 0, \text{ d.h. } (1-v)Qv = 0.$$

Ist I sogar eine prohomogene Komponente von D, so ist v zentral-primitiv in Q.

Ist andrerseits u ein zentral-primitives Idempotent von Q, so ist D direkte Summe der zweiseitigen Ideale $(1-u)D$ und uD. Ferner ist uD zweiseitig-unzerlegbar, denn jede Darstellung von uD mittels zweiseitiger Ideale induziert eine Darstellung von u durch nicht-triviale, zentrale Idempotente. uD ist also in der Tat eine prohomogene Komponente von D.

Es ist evident, dass die beiden Abbildungen zueinander invers sind. □

(3.5) *KOROLLAR*. D ist direkte Summe seiner prohomogenen Komponenten. □

Ist D_R projektiv, so sind wegen (2.6) Q und e_0Re_0 Morita-äquivalent bzgl. dem Progenerator $Re_{0e_0Re_0}$. In diesem Falle wird durch die Zuordnung $J \longmapsto J \cap e_0Re_0 = e_0Je_0$ eine Bijektion zwischen der Menge der zweiseitigen Ideale von Q und der Menge der zweiseitigen Ideale von e_0Re_0 definiert. Insbesondere ist also die Abbildung

$$\{\text{Blöcke von } Q\} \longrightarrow \{\text{Blöcke von } e_0Re_0\}$$
$$J \longmapsto e_0Je_0$$

1-1-deutig. Der folgende Satz, kombiniert mit (3.4), zeigt aber, dass hier eine Verallgemeinerung möglich ist.

(3.6) *SATZ*. Durch die Zuordnung

$$I \longmapsto I \cap e_0Re_0 = e_0Ie_0$$

wird eine Bijektion zwischen der Menge der prohomogenen Komponenten von D und der Menge der Blöcke von e_0Re_0 definiert. Die Umkehrung ist gegeben durch

$$K \longmapsto RKR.$$

Für den Beweis von (3.6) benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

(3.7) LEMMA. Es sei $I \neq 0$ ein Ideal von R. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $D = I \oplus I'$, wo I' ein weiteres Ideal von R ist.

(b) Es gibt ein zentrales Idempotent $E \neq 0$ von e_0Re_0 mit $I = RER$.

Beweis von (3.7). (a)⇒(b). e_0 ist eindeutig darstellbar in der Form $e_0 = E + E'$, wo $E \in I$ und $E' \in I'$. Dabei sind E, E' orthogonale Idempotente von e_0Re_0. Sie sind zentral, denn es gilt: $ERE' \subset I \cap I' = 0$ und $E'RE \subset I \cap I' = 0$.

(b)⇒(a). D ist Summe der beiden Ideale RER und $R(e_0-E)R$. Diese Summe ist direkt, denn aus $x \in RER \cap R(e_0-E)R$ folgt: $xRe_0 \subset RE \cap R(e_0-E) = 0$, also $x = 0$. □

Beweis von (3.6). Wegen (3.7) existiert zur prohomogenen Komponente I ein zentrales Idempotent E von e_0Re_0 mit $I = RER$. E ist sogar zentral-primitiv in e_0Re_0. Ist nämlich $E = E_1 + E_2$ eine Darstellung von E durch orthogonale, zentrale Idempotente E_1, E_2 von e_0Re_0, so gilt: $RER = RE_1R \oplus RE_2R$. $e_0Ie_0 = ERe$ ist also in der Tat ein Block von e_0Re_0.

Ist andrerseits K ein Block von e_0Re_0 und E das zu K gehörende zentral-primitive Idempotent, so ist $RKR = RER$ zweiseitig-unzerlegbar. Sonst gäbe es nämlich wegen (3.7) in RER zwei orthogonale, zentrale Idempotente E_1, E_2 (beide $\neq 0$) von e_0Re_0. E_1, E_2 wären dann auch in K enthalten, was aber unmöglich ist. Folglich ist $RKR = RER$ eine prohomogene Komponente von D.

Die beiden Abbildungen sind also wohldefiniert. Es ist offensichtlich, dass sie zueinander invers sind. □

$\{E_1,\ldots,E_s\}$ sei die Menge der zentral-primitiven Idempotente von e_0Re_0. Wegen (3.4) und (3.6) sind die Abbildungen im folgen-

den Diagramm bijektiv:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Zentral-primitive}\\ \text{Idempotente von } e_0Re_0\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Prohomogene Kom-}\\ \text{ponenten von } D\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Zentral-primitive}\\ \text{Idempotente von } Q\end{array}\right\}$$

$$E_i \longmapsto RE_iR \longmapsto u_i := \text{Projektion von } D \text{ auf } RE_iR$$

$\{u_iQ \mid i = 1,\ldots,s\}$ ist also die Menge der Blöcke von Q. Dabei ist $u_iQ = \mathrm{Hom}_R(D, RE_iR) \cong \mathrm{End}_R(RE_iR)$ $[qRE_jR \subset RE_jR$ für jedes $q \in Q$ und jedes $j = 1,\ldots,s]$. Somit gilt:

(3.8) *KOROLLAR.*

(a) $\{RE_iR \mid i = 1,\ldots,s\}$ ist die Menge der prohomogenen Komponenten von D.

(b) Q ist isomorph dem Produkt der s unzerlegbaren Ringe $\mathrm{End}_R(RE_iR)$. □

Für jedes $j \in \{1,\ldots,m\}$ sei $e_j = e_{j1}+\ldots+e_{jk_j}$ (Vgl. (A) in Abschnitt 1). Jedes E_i ist Summe gewisser e_j. Deshalb ist $s \leq m$. Gleichheit gilt genau dann, wenn jedes e_j in e_0Re_0 zentral ist, d.h. wenn e_0Re_0 primär darstellbar[4] ist. Diese Bedingung ist notwendig aber nicht hinreichend dafür, dass auch der maximale Quotientenring Q primär darstellbar ist. Es gilt nämlich:

(3.9) *SATZ.* Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Q ist primär darstellbar.

(b) D_R ist projektiv und e_0Re_0 ist primär darstellbar.

In diesem Falle ist Q isomorph dem Produkt der m Matrizen-

---

[4]) Ein semiprimärer Ring A mit dem Radikal Rad A heisst primär, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(a) A/Rad A ist einfach.

(b) Alle primitiven Idempotente von A sind isomorph.

A heisst primär darstellbar, wenn jeder Block von A primär ist.

ringe $\mathrm{Mat}_{s_i}(e_{i1}Re_{i1})$. Dabei ist s_i die Vielfachheit von $e_{i1}R$ in einer Darstellung von D_R durch unzerlegbare Summanden.

Beweis. (a)⇔(b). Jeder primär darstellbare Ring ist ein K-Ring ([17], Example 5.4). Folglich impliziert (a), dass D_R projektiv ist.

Ferner ist die Eigenschaft, primär darstellbar zu sein, Morita-invariant. Ist nun D_R projektiv, so sind e_0Re_0 und Q Morita-äquivalent. In diesem Falle ist also e_0Re_0 genau dann primär darstellbar, wenn Q es ist.

Gelten (a) und (b), so ist wegen (3.8) $\{Re_{i1}R \mid i = 1,\ldots,m\}$ die Menge der prohomogenen Komponenten von D. Mit D_R sind auch alle R-Rechtsmoduln $Re_{i1}R$ projektiv. Dabei ist wegen (2.7) jeder unzerlegbare Summand I von $Re_{i1}R$ zumindest isomorph einem $e_{j1}R$, $j \in \{1,\ldots,m\}$. Es ist sogar $j = i$, denn für $j \neq i$ gilt: $Ie_{j1} \subset Re_{i1}Re_{j1} = 0$. Folglich ist der R-Rechtsmodul $Re_{i1}R$ isomorph einer direkten Summe von s_i Kopien von $e_{i1}R$. Wir schliessen daraus: $\mathrm{End}_R(Re_{i1}R) \cong \mathrm{Mat}_{s_i}(e_{i1}Re_{i1})$. Aus (3.8) folgt nun die zusätzliche Behauptung von (3.9). □

Wir untersuchen nun die Struktur der prohomogenen Komponenten noch etwas genauer. Dazu führen wir gewisse Rechtsideale ein, die in Bezug auf die prohomogenen Komponenten eine ähnliche Funktion erfüllen wie die minimalen Rechtsideale in Bezug auf die homogenen Komponenten.

Definition. Ein Rechtsideal I von R heisst prominimal, wenn gilt:

(a) I ist unzerlegbar.

(b) I/IN ist isomorph einer direkten Summe von minimalen Rechtsidealen.

Natürlich ist jedes minimale Rechtsideal prominimal. Ferner ist wegen (2.7) jeder unzerlegbare Summand von D_R prominimal.

(3.10) *BEISPIEL*. Ein prominimales Rechtsideal I braucht nicht lokal zu sein, d.h. I/IN ist im allgemeinen nicht einfach.

Wir betrachten den Ring R der 4x4-Matrizen über dem Körper K von der Form

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & f & e & 0 \\ 0 & g & 0 & e \end{bmatrix}$$

Das kleinste dichte Rechtsideal D umfasst alle Elemente von R mit $a = 0$. I sei nun die Menge aller Matrizen in R vom Typ

$$\begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Das Rechtsideal I ist unzerlegbar: Mit ([17], Prop.7.1) ist es möglich, den Endomorphismenring von I zu bestimmen. $\mathrm{End}_R(I)$ ist isomorph dem Ring aller 3x3-Matrizen über K von der Form

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Dieser ist offensichtlich lokal. I ist also ein unzerlegbarer Summand von D_R. Folglich ist I prominimal.

I ist nicht lokal. Sein Radikal besteht nämlich aus allen Elementen von I mit $c = d = 0$. Es ist kein maximaler Untermodul von I.

(3.11) *SATZ*. D ist Summe der prominimalen Rechtsideale.

Beweis. Wegen (2.7) ist D direkte Summe von gewissen prominimalen Rechtsidealen. Folglich genügt es zu zeigen, dass jedes prominimale Rechtsideal I in D enthalten ist. Bedingung (b) der

Definition impliziert aber: $Ie_0R + IN = I$. Da ja IN klein ist in I, schliessen wir: $I = ID \subset D$. □

(3.12) *KOROLLAR*. $Z = 0$ genau dann, wenn jedes prominimale Rechtsideal minimal ist.

Beweis. Folgerung aus (3.11) und ([17], Prop.2.6). □

Zwei prominimale Rechtsideale I, K seien äquivalent ($I \sim K$), wenn eine endliche Folge von prominimalen Rechtsidealen $I = I_1, I_2, \ldots, I_r = K$ derart existiert, dass je zwei aufeinanderfolgende Glieder dieser Folge einen gemeinsamen, zu einem minimalen Rechtsideal isomorphen Kompositionsfaktor haben. Dies definiert offenbar eine Aequivalenzrelation auf der Menge der prominimalen Rechtsideale.

(3.13) *LEMMA*. Wie in (3.8) sei $\{E_1, \ldots, E_s\}$ die Menge der zentral-primitiven Idempotente von e_0Re_0.

Zwei prominimale Rechtsideale I, K sind genau dann äquivalent, wenn es ein E_i gibt mit $IE_i \neq 0$ und $KE_i \neq 0$.

Beweis. Jedes prominimale Rechtsideal I hat die Eigenschaft $ID = I$. Da aber I nach Definition unzerlegbar ist, gibt es genau ein $i \in \{1, \ldots, s\}$ mit $IE_i \neq 0$. Wir können so jedem prominimalen Rechtsideal in eindeutiger Weise ein zentral-primitives Idempotent von e_0Re_0 zuordnen. Haben zwei prominimale Rechtsideale einen gemeinsamen, zu einem minimalen Rechtsideal isomorphen Kompositionsfaktor, so gehört zu ihnen das gleiche zentral-primitive Idempotent. Folglich gehört auch zu zwei äquivalenten prominimalen Rechtsidealen das gleiche E_i.

Es sei nun umgekehrt $IE_i \neq 0$ und $KE_i \neq 0$. Dann gibt es im Block E_iRe_0 zwei primitive Idempotente e_{jl}, e_{kl} derart, dass $Ie_{jl} \neq 0$ und $Ke_{kl} \neq 0$. e_{jl} und e_{kl} sind also in e_0Re_0 "ver-

kettet". Deshalb sind die beiden prominimalen Rechtsideale $e_{j1}R$ und $e_{k1}R$ äquivalent. Wir schliessen: $I \sim e_{j1}R \sim e_{k1}R \sim K$. □

$\{I\}$ bezeichne die Aequivalenzklasse des prominimalen Rechtsideales I. Ferner sei

$$[I] = \sum_{K \in \{I\}} K.$$

Ist $Z = 0$, so sind wegen (3.12) die prominimalen Rechtsideale gerade die minimalen Rechtsideale. Zwei minimale Rechtsideale sind in diesem Falle genau dann äquivalent, wenn sie isomorph sind. Die Ideale $[I]$ sind deshalb gerade die homogenen Komponenten.

(3.14) SATZ. Ist I ein prominimales Rechtsideal von R, so ist $[I]$ eine prohomogene Komponente von D. Ferner kann man durch Umnummerieren der e_{ij} erreichen, dass $\{[e_{11}R],[e_{21}R],\ldots,[e_{s1}R]\}$ die Menge aller prohomogenen Komponenten von D ist.

Beweis. Es ist möglich, die e_{ij} so zu nummerieren, dass für jedes $i = 1,\ldots,s$ gilt: $e_{i1} \in RE_iR$. Dann ist $[e_{i1}R]$ in der prohomogenen Komponente RE_iR enthalten. Ist nämlich I ein weiteres, zu $e_{i1}R$ äquivalentes, prominimales Rechtsideal, so ist wegen (3.13) $IE_i \neq 0$. Es folgt dann: $I = IE_iR \subset RE_iR$.

Man sieht leicht ein, dass jedes prominimale Rechtsideal zu einem $e_{i1}R$ ($i \in \{1,\ldots,s\}$) äquivalent ist. Folglich ist wegen (3.11) D die Summe der $[e_{i1}R]$, $i = 1,\ldots,s$. Diese Summe ist wegen obiger Ueberlegung direkt. $\{[e_{11}R],[e_{21}R],\ldots,[e_{s1}R]\}$ ist demzufolge die Menge der prohomogenen Komponenten von D. □

4. EINE CHARAKTERISIERUNG VON QUASI-FROBENIUSALGEBREN

Ein beidseitig-Artinscher Ring R heisst Quasi-Frobeniusring, wenn durch die Zuordnung $I \longmapsto \ell_R(I)$ ein Antiisomorphismus zwischen dem Verband der Rechtsideale und dem Verband der Linksideale von R definiert wird, d.h. wenn für jedes Rechtsideal I und jedes Linksideal L von R folgende Annullatorgleichungen gelten:

$$r_R\ell_R(I) = I, \quad \ell_R r_R(L) = L.$$

Natürlich ist jeder Quasi-Frobeniusring ein K-Ring ([17], Prop.5.1). Eine Quasi-Frobeniusalgebra ist eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra R, welche den Annullatorgleichungen genügt. Gelten in R überdies für jedes Rechtsideal I und für jedes Linksideal L von R die Dimensionsgleichungen

$$\dim_K I + \dim_K \ell_R(I) = \dim_K R$$
$$\dim_K L + \dim_K r_R(L) = \dim_K R,$$

so heisst R Frobeniusalgebra. Beispielsweise ist jede Gruppenalgebra $K[G]$ eine Frobeniusalgebra, falls G eine endliche Gruppe ist.

Es gibt recht viele Charakterisierungen von Frobeniusalgebren und Quasi-Frobeniusalgebren. Einen umfassenden Einblick in diese Theorie gewähren die grundlegenden Arbeiten von T.Nakayama und M.Ikeda ([6], [10], [11], [12], [13], [14]). Das folgende, leicht modifizierte Kriterium von T.Nakayama ([13], Th.1) ist Grundlage unserer Ueberlegungen.

(4.1) SATZ.

(a) R sei eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra. Genau dann ist R eine Quasi-Frobeniusalgebra, wenn R ein rechts-K-Ring ist und zusätzlich eine Permutation π von $\{1,\ldots,m\}$ existiert, sodass für jedes $i = 1,\ldots,m$ gilt:

$$e_{i1}S \cong e_{\pi(i)1}R/e_{\pi(i)1}N.$$

(b) Eine Quasi-Frobeniusalgebra R mit zugehöriger Permutation π ist genau dann eine Frobeniusalgebra, wenn für jedes $i = 1,\ldots,m$ gilt: $k_i = k_{\pi(i)}$ [k_i wie in (A), Abschnitt 1].

Bei der Verifikation konkreter Beispiele sind folgende Resultate nützlich:

(4.2) SATZ.

R sei eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra. R ist genau dann eine Frobeniusalgebra, wenn gilt:

(a) $r_R\ell_R(N) = N$, d.h. R ist rechts-K-Ring ([17], Prop.5.1).

(b) Für jedes primitive Idempotent e von R ist eS ein einfacher Rechtsmodul.

(c) $\dim_K Se + \dim_K Ne = \dim_K Re$ für jedes primitive Idempotent e von R.

(4.3) SATZ[5]. R ist genau dann eine Quasi-Frobeniusalgebra, wenn (a) und (b) gelten.

Beweis von (4.3). Bekanntlich gelten in jedem Quasi-Frobeniusring die Bedingungen (a) und (b).

Wir zeigen die Umkehrung. Wegen (a) ist jedes primitive Idempotent sogar S-primitiv. Die Darstellung (A) aus Abschnitt 1 reduziert sich deshalb auf die Form

$$1 = e_{11}+\ldots+e_{1k_1}+e_{21}+\ldots+e_{2k_2}+\ldots+e_{m1}+\ldots+e_{mk_m}.$$

Jedes minimale Rechtsideal M ist isomorph einem $e_{i1}S$: Zu M existiert nämlich ein e_{ij} derart, dass $e_{ij}M \neq 0$. Es folgt: $M \cong e_{ij}M = e_{ij}S \cong e_{i1}S$. Dabei haben wir von (b) Gebrauch gemacht.

---

[5]) In dieser Form gilt (4.3) nicht für beidseitig-Artinsche Ringe (Vgl. Beispiel 6.3). F.Kasch ([7], Satz 13.4.2) hat aber gezeigt, dass ein beidseitig-Artinscher Ring genau dann ein Quasi-Frobeniusring ist, wenn (a), (b) und das Links-Analoge von (b) gelten.

Wir haben nun also gezeigt, dass $\{e_{i1}S \mid i = 1,\ldots,m\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem nicht-isomorpher, minimaler Rechtsideale von R ist. Es gibt deshalb eine Permutation π von $\{1,\ldots,m\}$ derart, dass

$$e_{i1}S \cong e_{\pi(i)1}R/e_{\pi(i)1}N \quad \text{für alle} \quad i = 1,\ldots,m.$$

Aus (4.1) schliessen wir, dass R eine Quasi-Frobeniusalgebra ist. □

Den Beweis von (4.2) stellen wir noch etwas zurück. Er folgt im Anschluss an (4.5).

(4.4) *LEMMA*. Ist R ein Quasi-Frobeniusring, so gilt für jedes primitive Idempotent e von R: $\mathrm{End}_R(eS) \cong eRe/eNe$.

Beweis. e' sei ein weiteres primitives Idempotent von R mit $eSe' \neq 0$. eSe' ist als eRe-Linksmodul wie auch als $e'Re'$-Rechtsmodul einfach. Wir wählen $x \in eSe'$, $x \neq 0$ und definieren

$$\phi : eRe/eNe \longrightarrow eSe';\ ere+eNe \longmapsto erex$$

$$\psi : e'Re'/e'Ne' \longrightarrow eSe';\ e're'+e'Ne' \longmapsto xe're'$$

ϕ ist ein eRe-Isomorphismus, ψ ein $e'Re'$-Isomorphismus. $\phi^{-1}\psi$ ist a priori nur ein Gruppenisomorphismus. Eine leichte Rechnung zeigt aber, dass $\phi^{-1}\psi$ tatsächlich ein Ringisomorphismus ist. Folglich gilt: $\mathrm{End}_R(eS) \cong e'Re'/e'Ne' \cong eRe/eNe$. □

(4.5) *SATZ*.

R sei eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra.

(a) R ist genau dann eine Quasi-Frobeniusalgebra, wenn gilt: $R/N \cong \mathrm{End}_R(S_R)$.

(b) R ist genau dann eine Frobeniusalgebra, wenn R/N und S als R-Rechtsmoduln isomorph sind.

Beweis. (a). Ist R eine Quasi-Frobeniusalgebra, so gilt wegen (4.4):

$$R/N \cong \mathrm{Mat}_{k_1}(e_{11}Re_{11}/e_{11}Ne_{11}) \times \ldots \times \mathrm{Mat}_{k_m}(e_{m1}Re_{m1}/e_{m1}Ne_{m1})$$

$$\cong \mathrm{Mat}_{k_1}(\mathrm{End}_R(e_{11}S)) \times \ldots \times \mathrm{Mat}_{k_m}(\mathrm{End}_R(e_{m1}S)).$$

Dabei bildet $\{e_{i1}S \mid i = 1,\ldots,m\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der nicht-isomorphen, minimalen Rechtsideale von R und k_i ist auch die Vielfachheit von $e_{i1}S$ in S. Es folgt somit: $R/N \cong \mathrm{End}_R(S)$.

Nun die Umkehrung: Die beiden Ringe $\mathrm{End}_R(S)$ und R/N sind als Produkte von Matrizenringen über Schiefkörpern darstellbar. Bei einem Vergleich dieser beiden Darstellungen stellen wir fest:

Die Anzahl Isomorphieklassen minimaler Rechtsideale von R ist gleich der Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer Summanden von R_R, d.h. R ist ein rechts-K-Ring. Die Länge von S_R ist gleich der Länge einer Darstellung von R_R durch unzerlegbare Rechtsideale. Deshalb hat jedes von einem primitiven Idempotent erzeugte Rechtsideal einen einfachen Sockel.

Satz (4.3) impliziert nun, dass R Quasi-Frobeniusalgebra ist.

(b). Ist R eine Frobeniusalgebra, so gilt wegen (4.1):

$$S = e_{11}S \oplus \ldots \oplus e_{1k_1}S \oplus \ldots \oplus e_{m1}S \oplus \ldots \oplus e_{mk_m}S$$

$$\cong (e_{\pi(1)1}R/e_{\pi(1)1}N)^{k_1} \times \ldots \times (e_{\pi(m)1}R/e_{\pi(m)1}N)^{k_m} \cong R/N.$$

Sind umgekehrt S und R/N als R-Rechtsmoduln isomorph, so ist natürlich jedes primitive Idempotent S-primitiv, d.h. R ist ein rechts-K-Ring. Deshalb gilt:

$$e_{11}R/e_{11}N \times \ldots \times e_{1k_1}R/e_{1k_1}N \times \ldots \times e_{m1}R/e_{m1}N \times \ldots \times e_{mk_m}R/e_{mk_m}N$$

$$\cong e_{11}S \oplus \ldots \oplus e_{1k_1}S \oplus \ldots \oplus e_{m1}S \oplus \ldots \oplus e_{mk_m}S.$$

Wegen dem Satz von Krull-Remak-Schmidt existiert nun eine Permuta-

tion π, sodass für jedes $i = 1,\ldots,m$ gilt:

$$e_{i1}{}^S \cong e_{\pi(i)1}{}^{R/}e_{\pi(i)1}{}^N \quad \text{und} \quad k_i = k_{\pi(i)}.$$

Aus Satz (4.1) folgt schliesslich, dass R eine Frobeniusalgebra ist. □

Beweis von (4.2). Es bleibt lediglich zu zeigen, dass eine Quasi-Frobeniusalgebra R genau dann eine Frobeniusalgebra ist, wenn R der Bedingung (c) von (4.2) genügt. Zum Beweis dieser Aussage verwenden wir (4.5). Die R-Rechtsmoduln R/N und S haben in jedem Fall die gleichen Isomorphietypen einfacher Untermoduln. Sie sind also genau dann isomorph, wenn entsprechende Vielfachheiten auftreten, d.h. wenn für jedes primitive Idempotent e von R gilt:

$$\dim_{eRe/eNe} {}^{Se} = \dim_{eRe/eNe} {}^{Re/Ne}.$$

Diese Bedingung ist offensichtlich mit (c) äquivalent. □

(4.6) *BEMERKUNG*.

R sei eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra und R^* sei ihr K-Duales, d.h. $R^* = \mathrm{Hom}_K(R, K)$. Die drei folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) R ist eine Frobeniusalgebra.

(2) R und R^* sind als R-Rechtsmoduln isomorph.

(3) Links-Analoges zu (2).

Einen ausführlichen Beweis findet man z.B. in ([2], Th.61.3).

Noch eine Definition: Sind R und R^* sogar als R-R-Bimoduln isomorph, so heisst R symmetrisch. Man erwartet nun wegen dem zweiten Teil von (4.5), dass R genau dann symmetrisch ist, wenn R/N und S als R-R-Bimoduln isomorph sind. Diese Vermutung wird aber in (6.6) widerlegt.

(4.7) *KOROLLAR*.

R sei eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra. Ferner sei N' das Radikal des maximalen Quotientenringes Q.

Q ist genau dann eine Quasi-Frobeniusalgebra, wenn gilt: $Q/N' \cong End_R(S_R)$.

Beweis. SQ ist der Rechtssockel von Q ([17], Cor.4.6) und mit Hilfe von ([17], Prop.4.3) sieht man leicht ein, dass die beiden Ringe $End_R(S)$ und $End_Q(SQ)$ isomorph sind. □

Im nächsten Abschnitt werden wir eine R-interne Beschreibung für die Selbstinjektivität[6] von Q kennen lernen. Dabei wird u.a. der folgende Hilfssatz eine wichtige Rolle spielen.

(4.8) *LEMMA*. M sei ein unzerlegbarer Rechtsmodul über dem Quasi-Frobeniusring R. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(a) M ist projektiv.

(b) M ist injektiv

(c) $MS \neq 0$.

Beweis. (a)⇔(b) wegen ([3], Th.24.20).

(a)⇒(c) ist klar.

(c)⇒(a). Es gibt ein primitives Idempotent e von R derart, dass $MeS \neq 0$. Ferner wählen wir $x \in M$ so, dass $xeS \neq 0$. Wir definieren nun $\theta : eR \longrightarrow M$ durch $\theta(er) = xer$. θ ist ein injektiver R-Homomorphismus, da der einzige einfache Untermodul von eR, nämlich eS, nicht in $\ker \theta$ enthalten ist. Wegen der Injektivität von eR und der Unzerlegbarkeit von M ist θ sogar ein Isomorphismus. □

---

[6]) M.Ikeda ([6], Th.1) hat gezeigt, dass ein rechts- und links-Artinscher Ring R genau dann ein Quasi-Frobeniusring ist, wenn er selbstinjektiv ist, d.h. wenn R als R-Rechtsmodul (als R-Linksmodul) injektiv ist.

5. ALGEBREN MIT EINEM SELBSTINJEKTIVEN MAXIMALEN QUOTIENTENRING

(5.1) *LEMMA*. Es sei R ein rechts-Artinscher Ring, dessen kleinstes dichtes Rechtsideal D projektiv ist. N' bezeichne das Radikal des maximalen Quotientenringes Q. Dann gilt:

(a) $DS = S$.

(b) $N' \cap D = DN$.

Beweis. (a) Weil S auch ein Q-Linksmodul ist und wegen (2.6) gilt: $DS = DQS = S$.

(b) DN ist ein nilpotentes Linksideal von Q. Folglich ist DN in $N' \cap D$ enthalten. Für die umgekehrte Inklusion genügt es zu zeigen, dass $N' \cap D$ ein kleiner Untermodul von D_R ist. Es sei also $(N' \cap D) + I = D$ für einen Untermodul I von D_R. Dann gilt wegen (2.6): $Q = DQ = (N' \cap D)Q + IQ = N' + IQ$. Da aber N' klein ist in Q, erhalten wir: $IQ = Q$. Es folgt: $I = D$. □

(5.2) *LEMMA*. R sei ein rechts- und links-Artinscher Ring mit einem selbstinjektiven maximalen Quotientenring Q[7]. Ein primitives Idempotent e von R ist genau dann primitiv in Q, wenn der R-Rechtsmodul eS einfach ist. Insbesondere ist also eS einfach für jedes S-primitive Idempotent e von R.

Beweis. Ist $eS = \mathrm{Soc}(eR)$ einfach, so ist e wegen (2.5) primitiv in Q.

Umkehrung: Weil Q ein Quasi-Frobeniusring ist, enthält eQ genau ein minimales Rechtsideal, das wegen ([17], Th.4.5) von der Form MQ ist, wo M ein minimales Rechtsideal von R ist. M ist dann das einzige minimale Rechtsideal von R, das in eR enthalten ist. □

---

[7]) Wegen ([17], Prop.3.1) und ([3], Th.24.5) ist Q unter den gegebenen Voraussetzungen ebenfalls beidseitig-Artinsch.

(5.3) SATZ.

R sei eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra. Q ist genau dann eine Frobeniusalgebra, wenn gilt:

(a) $DS = S$.

(b) eS ist einfach für jedes S-primitive Idempotent e von R.

(c) $\dim_K Se + \dim_K DNe = \dim_K Re$ für jedes S-primitive Idempotent e von R.

(5.4) SATZ. Q ist genau dann eine Quasi-Frobeniusalgebra, wenn (a) und (b) gelten.

Beweis von (5.4). Die Notwendigkeit der Bedingungen (a) und (b) folgt unmittelbar aus (5.1) und (5.2). Wir zeigen nun, dass sie auch hinreichend sind.

e_0Se_0 ist der Rechtssockel von e_0Re_0. Ferner ist $\{e_{11},\ldots,e_{m1}\}$ eine Basismenge der primitiven Idempotente von e_0Re_0. Wegen (a) gilt für jedes $i = 1,\ldots,m$: $e_0Se_{i1} \neq 0$. Folglich ist e_0Re_0 ein rechts-K-Ring. Bedingung (b) impliziert aber, dass $\mathrm{Soc}(e_{i1}Re_0) = e_{i1}Se_0$ ein minimales Rechtsideal von e_0Re_0 ist für jedes $i = 1,\ldots,m$. Satz (4.3) besagt nun, dass e_0Re_0 sogar eine Quasi-Frobeniusalgebra ist.

Gelingt es nun zu zeigen, dass $Re_{0e_0Re_0}$ projektiv ist, so sind die Ringe e_0Re_0 und Q Morita-äquivalent bzgl. dem Progenerator $Re_{0e_0Re_0}$. Q ist dann ebenfalls Quasi-Frobeniusalgebra; denn die Eigenschaft, Quasi-Frobeniusring zu sein, ist Morita-invariant.

Es sei $I \neq 0$ ein unzerlegbarer Summand von $Re_{0e_0Re_0}$ mit dem Komplement I'. Wegen Bedingung (a) gilt:

$$Ie_0Se_0 \oplus I'e_0Se_0 = DSe_0 = Se_0 = \mathrm{Soc}(Re_{0e_0Re_0}) = \mathrm{Soc}\, I \oplus \mathrm{Soc}\, I'.$$

Folglich ist $Ie_0Se_0 = \mathrm{Soc}\, I \neq 0$. Wegen (4.8) ist also I tatsächlich projektiv. □

Beweis von (5.3). Man beachte die Sätze (4.2), (5.4) und die Gleichungen $Qe = Re$, $SQe = Se$, $N'e = DNe$, wobei die erste aus ([17], Lemma 4.2) und die letzte aus (5.1) folgt. □

(5.5) *BEMERKUNGEN*.

(1) Die Sätze (5.3) und (5.4) haben natürlich ein Analogon für den maximalen (Links-)Quotientenring.

(2) R sei ein rechts- und links-Artinscher Ring. Ist sein maximaler Quotientenring Q selbstinjektiv, so genügt R den Bedingungen (a) und (b) von (5.3). Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch (Vgl. Beispiel 6.3).

Wir ändern nun teilweise unsere Notation und führen für den Rest dieses Abschnittes folgende Bezeichnungen ein:

S_r bzw. S_ℓ: Rechts- bzw. Linkssockel.
D_r bzw. D_ℓ: Kleinstes dichtes Rechts- bzw. Linksideal.
Q_r bzw. Q_ℓ: Maximaler Rechts- bzw. Links-Quotientenring.

Analog zu den S_r-primitiven Idempotenten definiert man auch S_ℓ-primitive Idempotente.

Wir rufen noch eine weitere Definition in Erinnerung: Ein rechts- und links-Artinscher Ring R ist QF-3, wenn er ein treues, projektives und injektives Rechtsideal besitzt. Dazu äquivalent ist die Existenz eines treuen, projektiven und injektiven Linksideales. Man sieht leicht ein, dass Quasi-Frobeniusringe QF-2 und QF-3 sind. Ferner hat K.R.Fuller ([4], Th.4.1) gezeigt, dass jeder QF-2 Ring auch QF-3 ist. Somit gelten folgende Implikationen:

$$\text{Quasi-Frobenius} \Rightarrow \text{QF-2} \Rightarrow \text{QF-3}.$$

(5.6) *LEMMA*. Ein rechts- und links-Artinscher Ring R ist genau dann QF-3, wenn gilt:

(a) $S_\ell e$ ist einfach für jedes S_r-primitive Idempotent e von R.

(b) $e'S_r$ ist einfach für jedes S_ℓ-primitive Idempotent e' von R.

Beweis. Ist R QF-3, so ist wegen ([4], Th.2.1) jedes von einem S_r-primitiven Idempotent e erzeugte Linksideal Re injektiv. Folglich ist $\mathrm{Soc}(Re) = S_\ell e$ einfach. Aus der Symmetrie heraus ergibt sich auch Eigenschaft (b).

Umgekehrt finden wir zu jedem S_r-primitiven Idempotent e ein S_ℓ-primitives Idempotent e' derart, dass $e'S_\ell e \neq 0$. Durch Kombinieren der Bedingungen (a) und (b) erhält man sofort die Gleichung $e'S_\ell e = e'S_r e$. Es gilt deshalb:

$$S_\ell e \cong Re'/Ne' \quad \text{und} \quad e'S_r \cong eR/eN.$$

Aus einem weiteren Resultat von Fuller ([4], Th.3.6) folgt nun, dass Re_0 injektiv ist. Re_0 ist also in der Tat ein treuer, projektiver und injektiver Linksmodul. □

Wenn ein Isomorphismus von Q_r auf Q_ℓ existiert, der auf R die Identität induziert, so sagen wir, R habe einen zweiseitig-maximalen Quotientenring. Beispielsweise hat jeder QF-3 Ring einen zweiseitig-maximalen Quotientenring ([19], Prop.4.5).

(5.7) *SATZ*. Eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra R hat genau dann einen selbstinjektiven, zweiseitig-maximalen Quotientenring, wenn gilt:

(a) $D_r S_r = S_r$.

(b) eS_r ist einfach für jedes S_r-primitive Idempotent e von R.

(c) $S_\ell e$ ist einfach für jedes S_r-primitive Idempotent e von R.

(d) $e'S_r$ ist einfach für jedes S_ℓ-primitive Idempotent e' von R.

Beweis. Folgerung aus (5.4), (5.6) und ([17], Th.6.4). □

(5.8) *BEMERKUNGEN*. Beispiele zeigen, dass keine der vier Bedingungen in (5.7) überflüssig ist.

Aus Symmetriegründen können die Bedingungen (a) und (b) in (5.7) ersetzt werden durch

(a') $S_\ell D_\ell = S_\ell$.

(b') $S_\ell e'$ ist einfach für jedes S_ℓ-primitive Idempotent e' von R.

6. BEISPIELE UND ERGAENZENDE BEMERKUNGEN

(6.1) *BEISPIEL*. R sei der Ring aller 6x6-Matrizen über dem Körper K von der Form

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ b & a & c & & 0 & \\ d & 0 & e & & & \\ & & & f & 0 & 0 \\ & 0 & & g & f & h \\ & & & i & 0 & e \end{bmatrix}$$

Sein kleinstes dichtes Rechtsideal D umfasst gerade alle Elemente von R der Gestalt

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ b & a & c & & 0 & \\ d & 0 & 0 & & & \\ & & & f & 0 & 0 \\ & 0 & & g & f & h \\ & & & i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R hat folgende Eigenschaften:

(a) R ist unzerlegbar, sein maximaler Quotientenring Q aber zerlegbar. D besitzt nämlich zwei prohomogene Komponenten. Folglich hat Q zwei Blöcke (Satz 3.4).

(b) R ist QF-3 (Verifikation mit Lemma 5.6). Man sieht aber leicht ein, dass R nicht QF-2 ist.

(c) R hat offensichtlich drei Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver Rechtsmoduln. Q hat aber deren vier. D_R ist nämlich direkte Summe von vier paarweise nicht-isomorphen, unzerlegbaren Untermoduln. Wegen (2.2) ist Q dann also direkte Summe von vier verschiedenen unzerlegbaren, projektiven Rechtsidealen.

(6.2) *BEMERKUNG*. R sei ein QF-2 Ring und Q sein maximaler Quotientenring. Dann ist wegen (3.2) die Anzahl der Blöcke von Q

gleich der Anzahl der Blöcke von R. Ferner ist die Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver Q-Rechtsmoduln kleiner oder gleich der Anzahl Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver R-Rechtsmoduln (Einfache Folgerung aus Korollar 2.5). Beide Aussagen lassen sich, wie Beispiel (6.1) zeigt, nicht auf QF-3 Ringe verallgemeinern.

(6.3) *BEISPIEL*. Wir zeigen anhand eines Beispiels von T.Nakayama ([13], p.48), dass in den Resultaten (4.3), (4.5.a), (4.7) und (5.4) die Voraussetzung betreffend R, eine endlich-dimensionale Algebra zu sein, wesentlich ist. Sie kann nicht durch die Bedingung "beidseitig-Artinsch" ersetzt werden.

Es sei $K = \mathbb{Z}_2(\xi)$ der Körper der rationalen Funktionen in ξ über dem Körper $\mathbb{Z}_2$. K hat Charakteristik zwei und über K^2 Dimension zwei. Es gilt nämlich: $K = K^2 \oplus \xi K^2$.

Es sei ferner $A = K \oplus xK$. Durch folgende Gleichungen wird auf A eine Ringstruktur definiert: $x^2 = 0$, $kx = xk^2$ $(k \in K)$. A, aufgefasst als Linksvektorraum über K, hat Dimension drei, denn $\{1, x, x\xi\}$ ist eine Basis. Folglich ist A rechts- und links-Artinsch. $xA = xK$ ist das einzige nicht-triviale Rechtsideal von A. Deshalb ist A ein K-Ring. Sein Rechtssockel ist einfach und sein rechts-singuläres Ideal ist gleich dem Radikal. Demzufolge genügt A den Bedingungen (a) und (b) von (4.2) bzw. (5.3). Natürlich sind die beiden Ringe A/xA und $\mathrm{End}_A(xA_A)$ isomorph (Vgl. Satz 4.5.a). Trotzdem ist A kein Quasi-Frobeniusring. A ist nicht einmal QF-3; denn der Linkssockel xA von A ist nicht einfach. xA ist nämlich direkte Summe der minimalen Rechtsideale xK^2 und $x\xi K^2$.

(6.4) *BEISPIEL*. Wir konstruieren einen rational vollständigen, rechts- und links-Artinschen Ring R, der die Eigenschaften (a) bis (d) von (5.7) besitzt, aber kein Quasi-Frobeniusring ist.

Der in (6.3) definierte Ring A bildet die Grundlage unserer

Konstruktion. Wir beschreiben zunächst seine injektive Hülle:

Es sei $E = K \oplus xK \oplus yK$ ein über K 3-dimensionaler Vektorraum, der A als Teilraum enthält. Durch folgende Tabelle wird eine Operation von A auf E erklärt:

$$x^2 = 0,\ yx = x\xi,\ kx = xk^2 \quad (k \in K).$$

Vermöge dieser Definition wird E zu einem A-Rechtsmodul. Dabei ist E eine wesentliche Erweiterung von A. E ist auch injektiv. Man sieht nämlich leicht ein, dass jeder A-Homomorphismus $xA \longrightarrow E$ auf A fortsetzbar ist.

Wegen ([16], Chap. XI, Lemma 5.1) ist E ein injektiver Kogenerator. Natürlich ist E auch endlich erzeugt. Folglich sind die beiden Ringe $H := \mathrm{End}_A(E)$ und A Morita-dual bzgl. dem Bimodul ${}_H E_A$ ([3], Th.23.25). Wir zeigen nun, dass H und A isomorph sind.

Sicher ist jedes $a \in A$ eindeutig darstellbar in der Form $a = k_0 + k_1 x + k_2 x\xi$ $(k_0, k_1, k_2 \in K)$. Ferner sei $k_0 = k^2 + \xi\ell^2$ $(k, \ell \in K)$. Auch diese Darstellung ist eindeutig. Wir definieren nun eine K-lineare Abbildung ϕ_a von E auf sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \phi_a(1) &= k + xk_2 + y\ell \\ \phi_a(x) &= xk_0 \\ \phi_a(y) &= \xi\ell + xk_1 + yk. \end{aligned}$$

Aus einfachen Rechnungen geht hervor, dass ϕ_a sogar die A-Modulstruktur erhält und dass die Zuordnung $\phi : A \longrightarrow H$, $a \longmapsto \phi_a$ tatsächlich ein Ringisomorphismus ist. H ist also insbesondere beidseitig-Artinsch.

$\mathrm{Hom}_A(E, A)$ ist ein nicht-triviales Rechtsideal von H, denn es enthält $u := \phi_x$. H besitzt aber nur ein nicht-triviales Rechtsideal, nämlich uH. Es folgt: $\mathrm{Hom}_A(E, A) = uH = \mathrm{Rad}\, H$.

Der A-Rechtsmodul $A \times E$ ist ein E-reflexiver Generator und Kogenerator. R sei dessen Endomorphismenring. Wir wollen zeigen,

dass R die gewünschten Eigenschaften hat. Zunächst gilt:

$$R = \mathrm{End}_A(A \times E) = \begin{bmatrix} A & uH \\ E & H \end{bmatrix}$$

K kann vermöge der Zuordnung

$$k \longmapsto \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & \phi_k \end{bmatrix}$$

in R eingebettet werden. Offensichtlich hat R, aufgefasst als Rechtsvektorraum über K, Dimension acht. Es ist uns auch möglich, sofort eine Basis anzugeben:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} \right\}.$$

Als Linksvektorraum über K ist R 12-dimensional. Um dies einzusehen, sind einige Rechnungen notwendig. Man zeige insbesondere: $\{1, x\}$ ist eine Basis von E, aufgefasst als Linksvektorraum über $\phi(K)$, und $\{\phi_x, \phi_{x\xi}, \phi_{\xi x}, \phi_{\xi x\xi}\}$ ist eine Basis des K-Linksvektorraumes uH. Das folgende System bildet nun eine Basis in ${}_K R$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \phi_x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \phi_{x\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \phi_{\xi x} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \phi_{\xi x\xi} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_{x\xi} \end{bmatrix} \right\}.$$

R ist also beidseitig-Artinsch. Wegen ([19], Prop.5.2) ist R sogar QF-3 und rational vollständig. Deshalb genügt R den Bedingungen (c) und (d) von (5.7).

Berechnungen für das Radikal N, den Rechtssockel S und das kleinste dichte Rechtsideal D führen auf folgende Resultate:

$$N = \begin{bmatrix} xA & uH \\ E & uH \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} xA & 0 \\ xA & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} A & uH \\ E & uH \end{bmatrix}.$$

Man stellt nun ohne weiteres fest, dass die Bedingungen (a) und (b) von (5.7) erfüllt sind. Man beachte dabei lediglich, dass es in R bis auf Isomorphie nur ein S-primitives Idempotent gibt, nämlich

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Im übrigen sind auch die Bedingungen (a') und (b') von (5.8) erfüllt. Trotzdem ist der rational vollständige Ring R kein Quasi-Frobeniusring, da ja $D \neq R$.

(6.5) *BEMERKUNG*. Verschwindet das rechts-singuläre Ideal Z eines Ringes A, so ist der maximale Quotientenring, aufgefasst als A-Rechtsmodul, auch die injektive Hülle von A_A. Nicht immer ist es möglich, auf der injektiven Hülle E eines Ringes A eine Ringstruktur so zu definieren, dass die Ringmultiplikation eine Erweiterung der Moduloperation ist. Ein entsprechendes Beispiel hat B.Osofsky ([15], §2) konstruiert, ohne allerdings die injektive Hülle explizit zu berechnen. Der Ring A von (6.3) liefert uns ein neues Beispiel für obigen Sachverhalt. Dazu führen wir die Annahme, dass E ein Ring ist, der die A-Modulstruktur von E fortsetzt, auf einen Widerspruch.

Zunächst gilt: $(xy)x = x(yx) = x(x\xi) = 0$. xy annulliert also das einzige nicht-triviale Rechtsideal von A, d.h. $xy \in xK$. Folglich gibt es ein $k \in K$ mit $xy = xk$. Wir schreiben nun:

(1) $\quad ky = k_1 + xk_2 + yk_3 \quad (k_1, k_2, k_3 \in K)$

(2) $\quad y^2 = \ell_1 + x\ell_2 + y\ell_3 \quad (\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in K)$

Beide Gleichungen multiplizieren wir von rechts mit x. Wir erhalten:

$$kx\xi = k_1x + k_3x\xi$$

$$\xi x = \ell_1x + \ell_3x\xi$$

Vergleichen wir nun die Koeffizienten, so stellen wir fest:

$$k_1 = 0,\ k_3 = k \quad \text{und} \quad \ell_1 = \xi,\ \ell_3 = 0.$$

Dies wird in den Gleichungen (1) und (2) eingesetzt. Anschliessend werden diese neuen Gleichungen von links mit x multipliziert. Man erhält dann:

$$x(ky) = xyk,\ xy^2 = x\xi.$$

Es folgt: $x\xi = xy^2 = (xy)y = (xk)y = x(ky) = xyk = xk^2$. Wir stossen also auf den Widerspruch $\xi = k^2 \in K^2$.

(6.6) *BEMERKUNG.*

R sei eine über ihrem Grundkörper K endlich-dimensionale Algebra. Wir vergleichen nun die drei folgenden Bedingungen:

(a) R ist symmetrisch (Definition in 4.6).

(b) R/N und S sind als R-R-Bimoduln isomorph.

(c) R ist schwach symmetrisch, d.h. R ist eine Frobeniusalgebra und die Permutation π von (4.1) ist die Identität.

Behauptung. (a)$\Rightarrow$(b) und (b)$\Rightarrow$(c). Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b). Jede halbeinfach-Artinsche Algebra, insbesondere also R/N, ist symmetrisch[8]. Folglich wird der Sockel S von einem Element c des Zentrums von R erzeugt ([10], Th.13). Nun induziert der surjektive R-R-Homomorphismus $R \longrightarrow S,\ r \longmapsto cr$ die gewünschte Isomorphie zwischen R/N und S.

(b)$\Rightarrow$(c). Es seien also R/N und S als R-R-Bimoduln isomorph. Dann ist R wegen (4.5.b) eine Frobeniusalgebra und für jedes primitive Idempotent e von R gilt: $eSe \neq 0$, d.h. $eS \cong eR/eN$. Die Nakayama-Permutation π ist deshalb die Identität. R ist also in der Tat schwach symmetrisch.

(b)$\not\Rightarrow$(a). Wir verwenden ein Beispiel aus ([10], p.630): K sei

---

[8]) Einige Angaben zum Beweis dieser Aussage findet man in ([10], Fussnote 51).

ein Körper mit mindestens drei Elementen und es sei $\alpha \neq 0, 1$ ein Element von K. Nun sei R der Ring aller 4x4-Matrizen über K von der Form

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ \alpha b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

Das Radikal N bzw. der Sockel S ist die Menge aller Elemente von R der Gestalt

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ d & c & b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R ist nicht symmetrisch, erfüllt aber Bedingung (b); denn die Multiplikation mit dem Zentrumselement

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

liefert einen Homomorphismus von R auf S mit Kern N.

(c)$\neq$(b). R sei der Ring aller 4x4-Matrizen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen von der Form

$$\begin{bmatrix} a & 0 & & \\ b & \bar{a} & 0 & \\ & & \bar{a} & 0 \\ 0 & & \bar{b} & a \end{bmatrix}$$

R ist eine zentrale, 4-dimensionale $\mathbb{R}$-Algebra. Ihr Radikal N besteht aus allen Matrizen vom Typ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ b & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 \\ 0 & & \bar{b} & 0 \end{bmatrix}$$

Dabei gilt: $N = S$. R ist also ein lokaler Ring und besitzt nur ein einziges minimales Rechtsideal. Folglich ist R schwach symmetrisch. Bedingung (b) ist aber nicht erfüllt, weil S mit dem Zentrum von R, also mit $\mathbb{R}$, einen trivialen Durchschnitt hat. □

LITERATUR

[1] Anderson, F. und Fuller, K.: Rings and Categories of Modules. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974.

[2] Curtis, C. und Reiner, I.: Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. Interscience, New York 1962.

[3] Faith, C.: Algebra II, Ring Theory. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976.

[4] Fuller, K.: Structure of QF-3 rings. Trans. Amer. Math. Soc. 134, 343-354 (1968).

[5] Gabriel, P.: Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France 90, 323-448 (1962).

[6] Ikeda, M.: A characterisation of quasi-Frobenius rings. Osaka Math. J. 4, 203-210 (1952).

[7] Kasch, F.: Moduln und Ringe. Stuttgart: Teubner 1977.

[8] Lambek, J.: Lectures on rings and modules. Waltham: Blaisdell 1966.

[9] Müller, B.: On semiperfect rings. Ill. J. Math. 14, 464-467 (1970).

[10] Nakayama, T.: On Frobenius algebras I. Ann. of Math. 40, 611-633 (1939).

[11] Nakayama, T.: On Frobenius algebras II. Ann. of Math. 42, 1-21 (1941).

[12] Nakayama, T.: On Frobenius algebras III. Jap. J. Math. 18, 49-65 (1942).

[13] Nakayama, T.: Supplementary remarks on Frobenius algebras I. Proc. Jap. Acad. 45, 45-50 (1949).

[14] Nakayama, T. und Ikeda, M.: Supplementary remarks on Frobenius algebras II. Osaka Math. J. 2, 7-12 (1950).

[15] Osofsky, B.: On ring properties of injective hulls. Canad. Math. Bull. 7, 405-413 (1964).

[16] Stenström, B.: Rings of Quotients. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975.

[17] Storrer, H.H.: Rings of Quotients of Perfect Rings. Math. Z. 122, 151-165 (1971).

[18] Storrer, H.H.: Quotient overrings. Publ. Dép. Math. (Lyon) 10, 25-37 (1973).

[19] Tachikawa, H.: Quasi-Frobenius Rings and Generalisations. Lecture Notes in Mathematics 351, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973.

[20] Turnidge, D.: Torsion theories and rings of quotients of Morita-equivalent rings. Pac. J. Math. 37, 225-234 (1971).

[21] Utumi, Y.: On quotient rings. Osaka Math. J. 8, 1-18 (1956).

[22] Utumi, Y.: On rings of which any one-sided quotient rings are two-sided. Proc. Amer. Math. Soc. 14, 141-147 (1963).

LEBENSLAUF

Am 16. Februar 1951 wurde ich, Peter Strebel, als Bürger von Uezwil (AG) in Bremgarten (AG) geboren.

Nach vierjährigem Besuch des Lehrerseminars Wohlen erwarb ich im Frühjahr 1971 das Aargauische Lehrpatent. Im Herbst gleichen Jahres immatrikulierte ich mich an der Philosophischen Fakultät II der Universität Zürich. Hier studierte ich Mathematik im Hauptfach, Experimentalphysik und theoretische Physik in den Nebenfächern. Ende 1975 bestand ich die Diplomprüfung, im Sommer 1977 die Prüfung für das höhere Lehramt. Seit dem Sommersemester 1976 bin ich als Assistent am Mathematischen Institut der Universität Zürich tätig.

Während meines Studiums besuchte ich Vorlesungen und Seminarien bei folgenden Dozenten: E.Brun, P.Gabriel, F.Gimmi, A.Gray, H.Gross, P.Hess, H.Jarchow, G.Karrer, H.H.Keller, A.Kriszten, V.Meyer, G.Rasche, H.H.Storrer, N.Straumann, K.Strebel, F.Ulmer, N.Wirth, O.Woodtli.

Die vorliegende Arbeit entstand unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. H.H.Storrer. Ich möchte ihm ganz besonders für die zahlreichen Ratschläge und die stete Hilfsbereitschaft danken.